REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	
Concours d'aptitude au professorat de l'enseignement secondaire www.tunisie-etudes.info	
EPREUVE : SESSION DE JUILLET 2000	
EPREUVE : MATHEMATIQUE	**DUREE:** 4 heures

www.tunisie-etudes.info

Epreuve d'Algèbre et Géométrie.

Durée : 4 heures — Nombre de pages = 2

Exercice 1.

Soit E un espace euclidien de dimension finie. On note $\langle x \mid y \rangle$ le produit scalaire des vecteurs x et y et $\|x\| = \langle x \mid x \rangle^{1/2}$ la norme euclidienne du vecteur x.

Soit u un endomorphisme orthogonal de E vérifiant $u^2 = -id_E = -I$.

1) Montrer que la dimension de E est paire.

2) Montrer que pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $u(x)$ sont orthogonaux.

3) Montrer que si x est non nul, le plan engendré par x et $u(x)$ est stable par u ; montrer que l'orthogonal de ce plan est stable par u.

4) On suppose que $\dim E = 4$.
Montrer qu'il existe une base orthonormée dans laquelle l'endomorphisme u est représenté par la matrice U ci-contre.

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4) On suppose que $\dim E = 4$

4a) Donner les polynômes minimal et caractéristique de u.

4b) Ecrire une matrice représentant $\exp(tu)$, $(t \in \mathbb{R})$.

5) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme

$$A(t) = (u - tI)(u + tI)^{-1}$$

est orthogonal et que son déterminant vaut 1.

6) Ecrire le nombre complexe $(i - t)(i + t)^{-1}$ sous la forme $\alpha + i\beta$ et montrer que

$$A(t) = \alpha I + \beta u$$

Exercice 2.

On pose $\omega = \exp(2i\pi/5)$ et on désigne par v_k le vecteur colonne de $\mathbb{C}^5$ défini par

$$(1, \omega^k, \omega^{2k}, \omega^{3k}, \omega^{4k})$$

On désigne par P la matrice ci-contre.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer Pv_k et en déduire toutes les valeurs propres de P.

2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice $A = \frac{1}{2}(I + P)$.

Soit z_1, z_2, z_3, z_4 et z_5 cinq points du plan complexe. On note

$$Z = [z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5]$$

le pentagone dont les côtés sont les segments

$$[z_1, z_2]\ ,\ [z_2, z_3]\ ,\ [z_3, z_4]\ ,\ [z_4, z_5]\ ,\ [z_5, z_1]$$

et on désigne par Z^* le pentagone

$$Z^* = [z_1^*,\ z_2^*,\ z_3^*,\ z_4^*,\ z_5^*]$$

dont les sommets z_i^* sont définis par

$$z_i^* = \frac{1}{2}(z_i + z_{i+1})\ ,\quad z_6 = z_1$$

et on dira que le pentagone Z est directement semblable au pentagone Z^* s'il existe une similitude directe g telle que $g(z_i) = z_i^*$ pour tout i $(1 \leq i \leq 5)$.

3) Comment choisir le pentagone Z pour qu'il soit directement semblable à Z^*

4) Donner, en vous servant d'un dessin deux exemples de pentagones Z (non réduits à un point) directement semblables à Z^*

Exercice 3

On considère, dans un plan euclidien orienté, un rectangle $ABCD$ dans lequel

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{2}\ ,\ [2\pi]$$

et on désigne par E le milieu de BC et par F celui de AD.

1) Sachant que les rectangles $ABCD$ et $ECDF$ sont semblables, calculer AB/AD.

2) Soit σ la similitude directe qui transforme A en E et B en C. Déterminer l'angle et le rapport de cette similitude.

3) Déterminer l'image par σ du rectangle $ABCD$.

4) Construire les images de A et B par $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$.

5) Quelle est la nature de σ^2 ?

6) Construire le centre de la similitude σ.

7) Soit s la similitude indirecte qui transforme A en D et B en F. Déterminer la nature de $s^2 = s \circ s$.

8) Déterminer le centre et l'axe de s.